



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
САМАРСКОЙ ОБЛАСТИ



ИНСТИТУТ РАЗВИТИЯ ОБРАЗОВАНИЯ

Кафедра математического и естественнонаучного образования
ГАУ ДПО СО «Институт развития образования»

Методические рекомендации по решению задания с параметром ГИА ОГЭ по математике

региональный семинар-практикум

31.01.2025

Романенко Елена Николаевна, учитель
математики , высшей категории
ГБНОУ СО «Самарский региональный центр для
одарённых детей»

Задание № 22 ГИА ОГЭ согласно кодификатору

контролирует элементы содержания:

Функции

5.1. Функция, способы задания функции. График функции. Область определения и множество значений функции. Нули функции. Промежутки знакопостоянства.

Промежутки монотонности функции. Максимумы и минимумы функции.

Наибольшее и наименьшее значение функции на промежутке.

В задании № 22 основными проверяемыми требованиями к предметным результатам освоения основной образовательной программы являются:

Умение строить графики, использовать графики для определения свойств процессов и зависимостей для решения задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение выражать формулами зависимости между величинами.

Основные проверяемые требования к метапредметным результатам:

Сформированность познавательных УУД

- 1.1 Базовые логические действия;
- 1.2 Базовые исследовательские действия;
- 1.3 Работа с информацией;

Сформированность регулятивных УУД

- 3.1 Самоорганизация;
- 3.2 Самоконтроль.

В задание № 22 рассматривается графический способ решения уравнений, имеющих один из двух видов:

1) $f(x) = m$;

2) $f(x) = kx$,

где $f(x)$ – произвольная функция, k и m – произвольные числа.

Уравнение $y=m$ ($m \in R$) задаёт множество всех прямых параллельных оси абсцисс. Уравнение $y=kx$ ($k \in R$) задаёт множество всех прямых, проходящих через начало координат, кроме оси ординат.

Как правило, требуется:

- либо найти все такие значения t или k , при которых
 - а) прямые $y=t$ или $y=kx$ не имеют общих точек с графиком функции $y=f(x)$;
 - б) прямые $y=t$ или $y=kx$ имеют с графиком функции $y=f(x)$ заданное число общих точек.
- либо найти наибольшее возможное число общих точек у прямых $y=t$ или $y=kx$ с графиком функции $y=f(x)$.

Алгоритм работы с заданием:

- преобразуем формулу, которая задаёт функцию, и найдём область определения функции;
- определим вид и характерные точки графика функции на каждом промежутке;
- изобразим график функции на координатной плоскости (учитывая точки разрыва функции);
- исследуем график функции, исходя из вопроса к заданию (проведём прямые $y=t$ или $y=kx$, согласно условию задачи);
- запишем ответ.

Проанализировав задание № 22 ОГЭ по математике, можно выделить три основные группы заданий:

1. Функции, при преобразовании которых необходимо раскрыть знак модуля.
2. Кусочно-заданные функции.
3. Дробно-рациональные функции.

Требования предъявляемые к выполнению заданий с развернутым ответом

- решение должно быть математически грамотным и полным, из него должен быть понятен ход рассуждений обучающегося;
- оформление решения должно обеспечивать выполнение указанных выше требований, а в остальном может быть произвольным;
- не следует требовать от обучающихся слишком подробных комментариев (например, описания алгоритмов). Лаконичное решение, не содержащее неверных утверждений, все выкладки которого правильны, следует рассматривать как решение без недочетов.

Примеры задания № 22

1. Постройте график функции $y = \begin{cases} x^2 + 4x + 7, & \text{при } x \geq -4, \\ -\frac{16}{x}, & \text{при } x \leq -4 \end{cases}$ При каких значениях m

прямая $y=m$ имеет ровно одну общую точку с графиком функции?

Решение:

1. Если $x \geq -4$, то $y = x^2 + 4x + 7$ парабола, ветви которой направлены вверх.

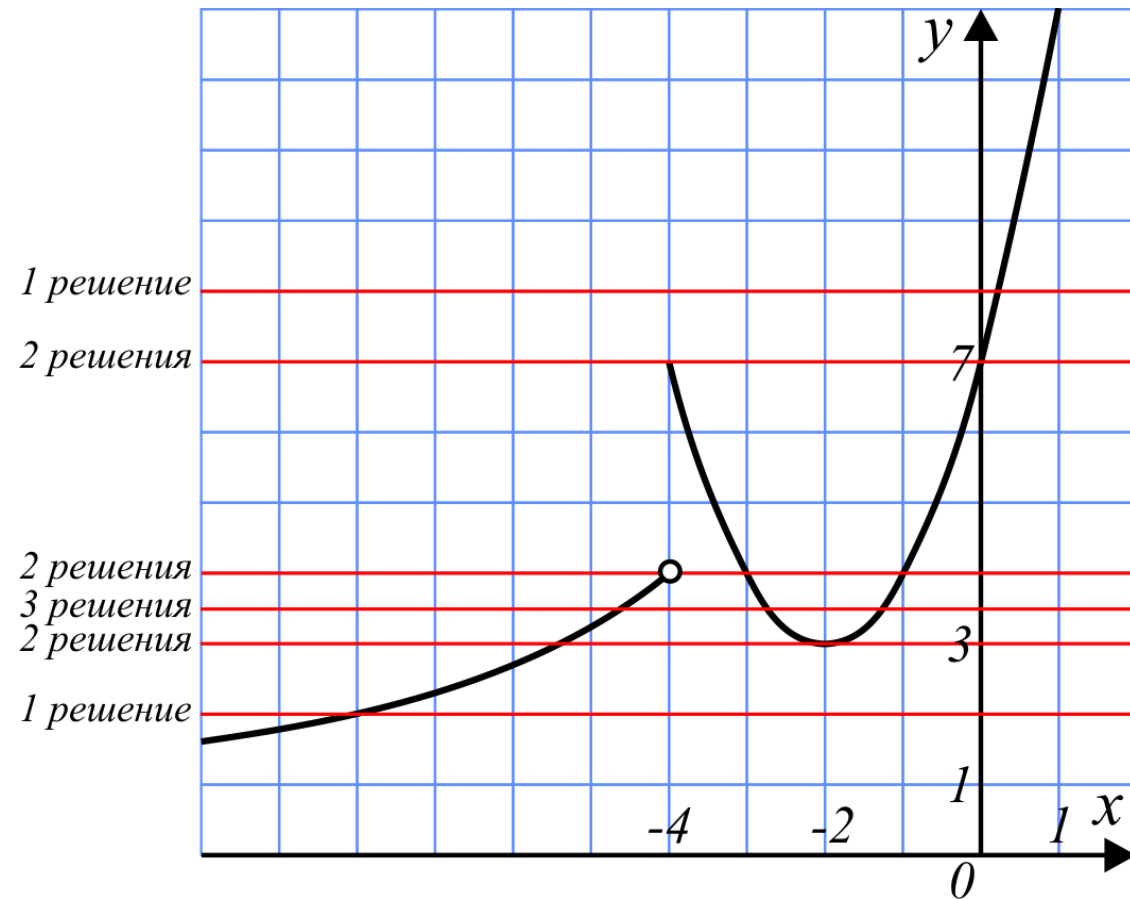
Найдем координаты вершины параболы

$$x_{\text{в}} = -\frac{4}{2} = -2, y_{\text{в}} = 4 - 8 + 7 = 3$$

Точка $(-2; 3)$ вершина параболы

Вычислим дополнительные точки для построения графика

X	-4	-3	-2	-1	0
y	7	4	3	4	7



2. Если $x < -4$, то $y = -\frac{16}{x}$ гипербола

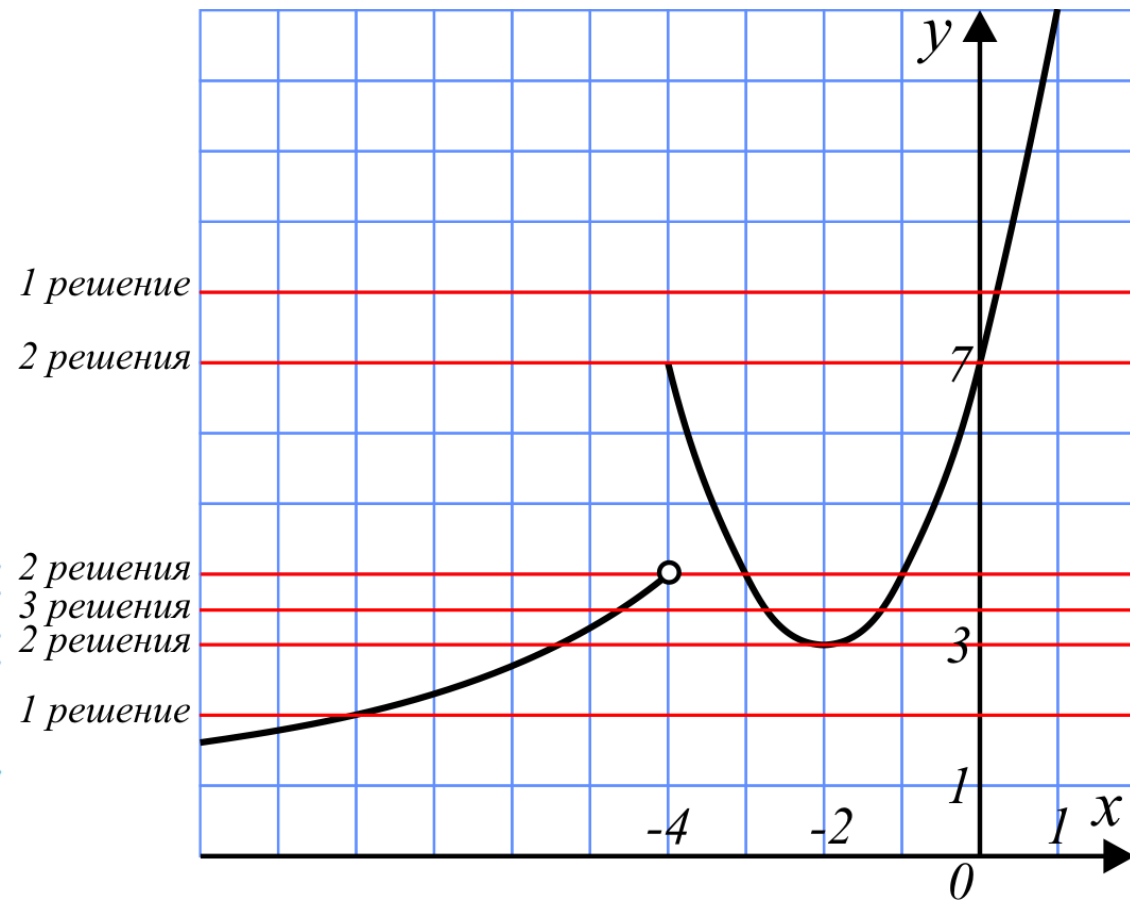
Вычислим дополнительные точки для построения графика

X	-16	-8	-4
y	1	2	4

3. Проводим горизонтальные прямые $y=m$, рассматриваем все случаи с разным количеством точек пересечения этой прямой с графиком функции.

Прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку если $0 < m < 3$ и $m > 7$.

Ответ: $m \in (0; 3) \cup (7; +\infty)$



2. Постройте график функции $y = \frac{1.5 \cdot |x| - 1}{|x| - 1.5 \cdot x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Решение:

Функция не определена при $x = 0$,
 $x = \frac{2}{3}, x = -\frac{2}{3}$.

При $x > 0$ и $x \neq \frac{2}{3}$ получаем

$$y = \frac{1.5 \cdot x - 1}{x - 1.5 \cdot x^2} = -\frac{1}{x}.$$

При $x < 0$ и $x \neq -\frac{2}{3}$ получаем

$$y = \frac{-1.5 \cdot x - 1}{-x - 1.5 \cdot x^2} = \frac{1}{x}.$$

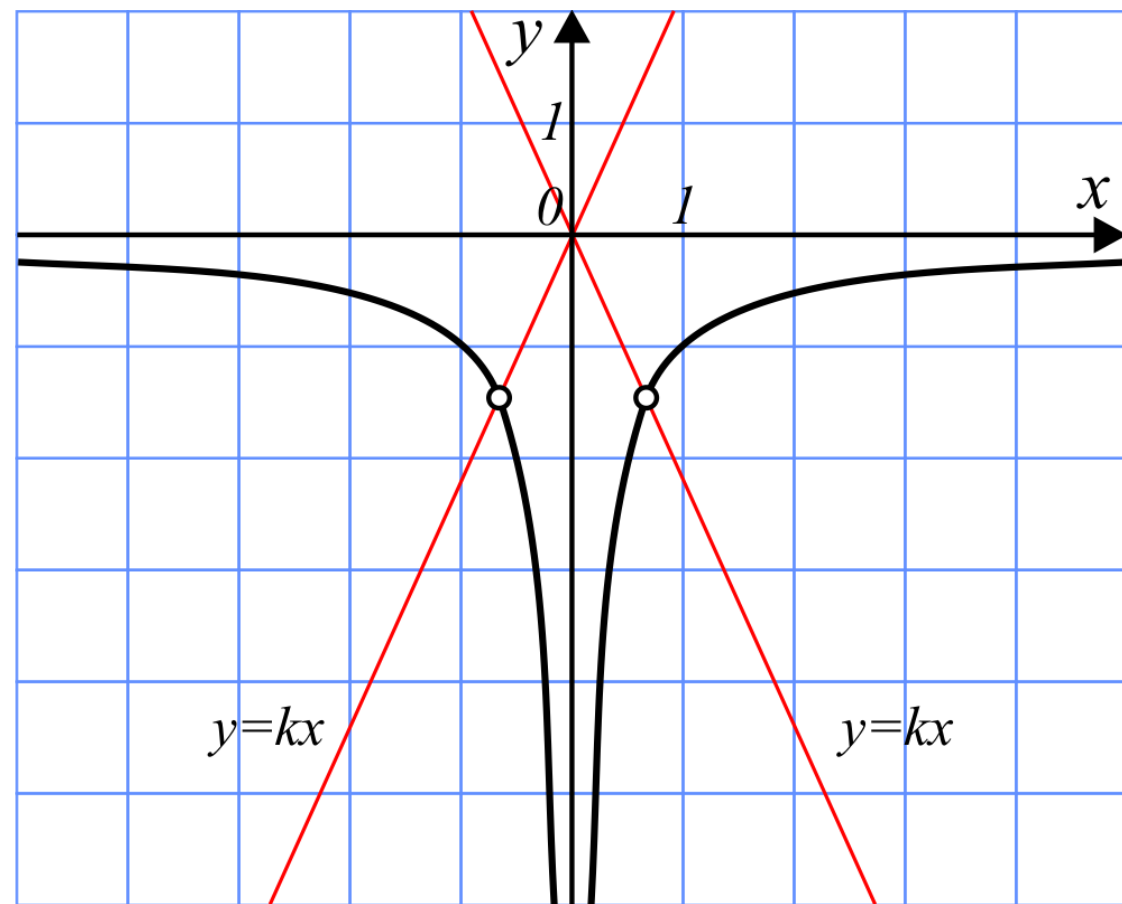


График функции состоит из частей двух гипербол, из которых выкололи точки

$$\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right) \text{ и } \left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$$

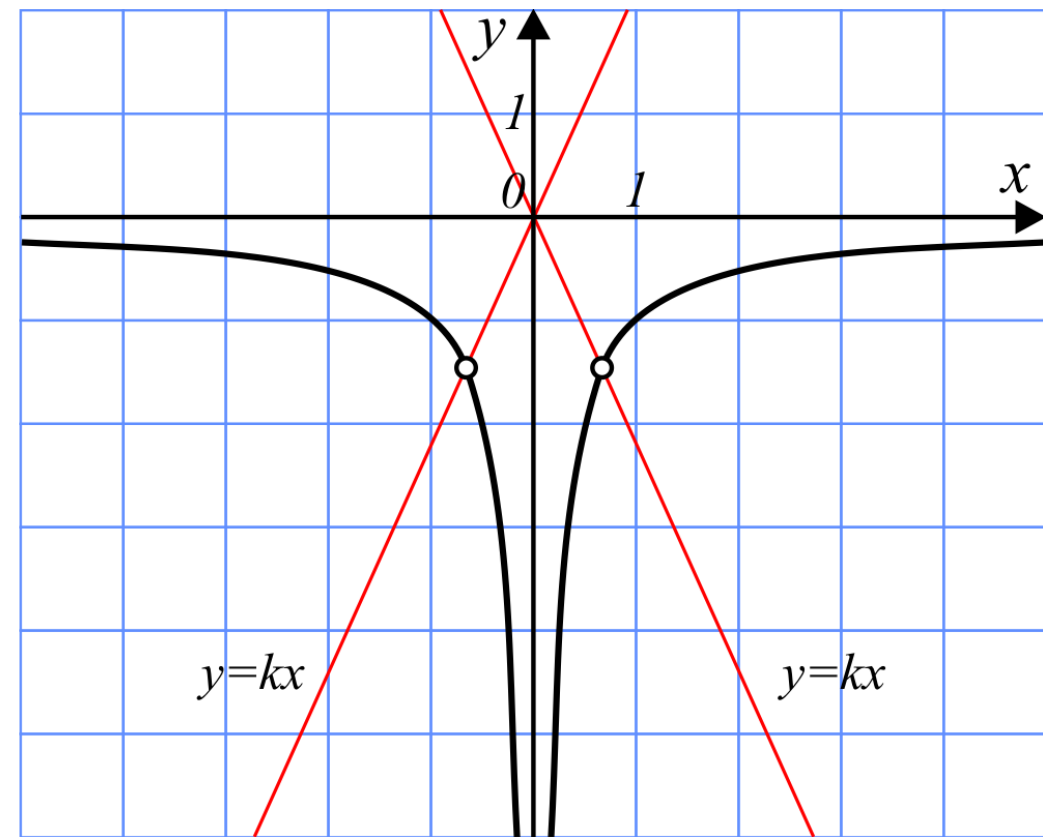
Прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной общей точки, если она горизонтальна, или если она проходит через одну из выколотых точек $\left(\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right)$ и

$$\left(-\frac{2}{3}; -\frac{3}{2}\right), \text{ то есть } k = -\frac{9}{4} \text{ или } k = \frac{9}{4}$$

$$\text{Ответ: } k=0, k = -\frac{9}{4}, k = \frac{9}{4}.$$

При выполнении задания обучающийся должен написать как нашлись значения

$$k = -\frac{9}{4} \text{ и } k = \frac{9}{4}.$$



3. Построить график функции $y = x^2 - |4x + 3|$. Определить при каких значениях параметра m прямая $y=m$ имеет с графиком две общие точки.

Решение:

Раскроем знак модуля и получим

$$y = \begin{cases} x^2 - 4x - 3, & \text{если } x \geq -0,75 \\ x^2 + 4x + 3, & \text{если } x < -0,75 \end{cases}$$

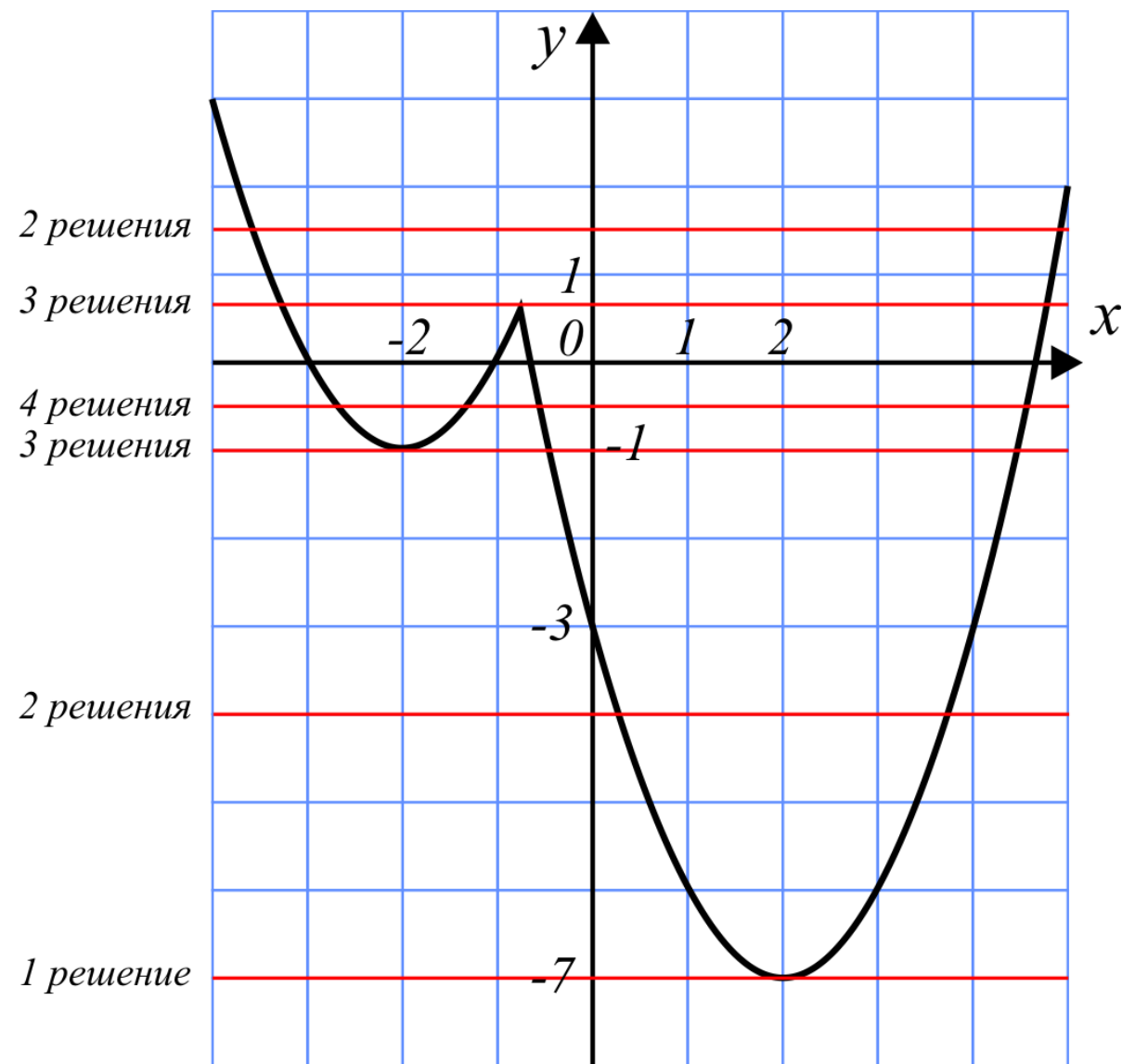
Получили кусочно заданную функцию.

Если $x \geq -0,75$, то $y = x^2 - 4x - 3$ парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы: $x_0 = \frac{4}{2} = 2, y_0 = -7$

Вычислим дополнительные точки для построения графика

X	-0,75	0	1	2	3	4,75
y	0,5625	-3	-6	-7	-6	0,5625

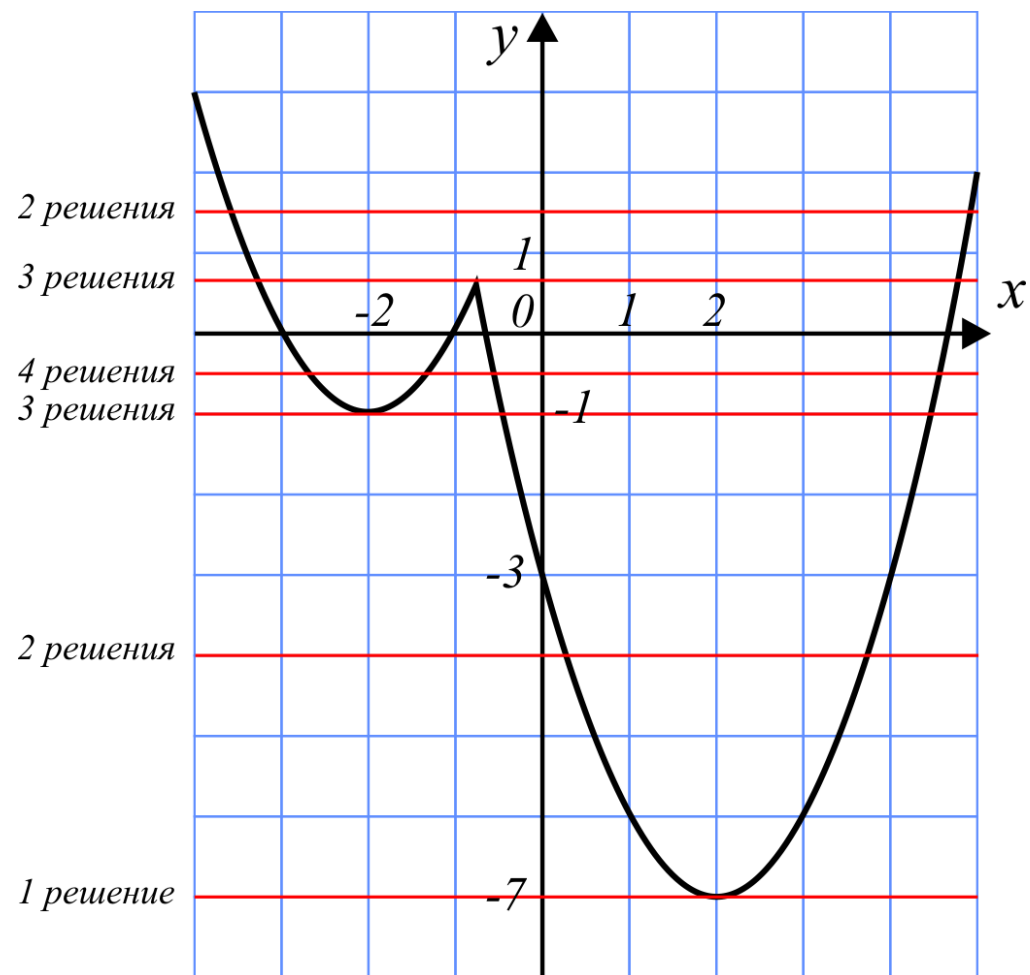


Если $x < -0,75$, то $y = x^2 + 4x + 3$ парабола, ветви которой направлены вверх.

Вершина параболы: $x_0 = \frac{-4}{2} = -2, y_0 = -1$

Вычислим дополнительные точки для построения графика

X	-3,25	-3	-2	-1	-0,75
y	0,5625	2	-1	2	0,5625



Проводим горизонтальные прямые $y=t$, рассматриваем все случаи с разным количеством точек пересечения этой прямой с графиком функции.

Прямая $y=t$ имеет с графиком две общие точки если $t \in (-7; -1) \cup (0,5625; +\infty)$

Ответ: $t \in (-7; -1) \cup (0,5625; +\infty)$.

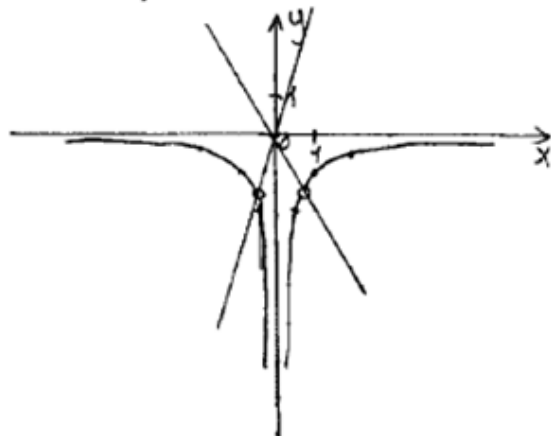
$$\sim 22) y = \frac{1,5|x| - 1}{|x| - 1,5x^2}$$

1) если $x \geq 0$, то

$$y = \frac{1,5x - 1}{1 - 1,5x^2} = \frac{1,5x - 1}{-x(1,5x - 1)} = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}, \text{ где } x \neq \frac{2}{3} \text{ и } y \neq -\frac{3}{2}$$

2) если $x < 0$, то

$$y = \frac{-1,5x - 1}{-x - 1,5x^2} = \frac{-1,5x - 1}{x(-1,5x - 1)} = \frac{1}{x}, \text{ где } x \neq -\frac{2}{3} \text{ и } y \neq -\frac{3}{2}$$



$y = kx$ не будет иметь общих точек с графиком если $y = 0$ (~~$k = 0$~~) то есть $k = 0$ или если он будет проходить через боковые точки $(\frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$ и $(-\frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$.

$$-\frac{3}{2} = k \cdot \frac{2}{3}$$

$$k = -\frac{9}{4} \neq$$

$$k = -2,25$$

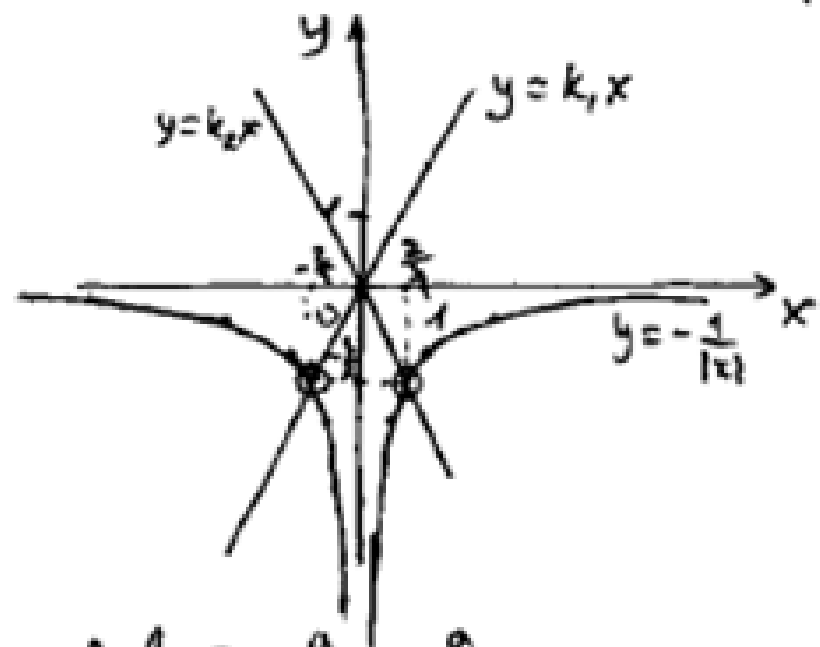
$$-\frac{3}{2} = -\frac{2}{3} k$$

$$k = \frac{9}{4}$$

$$k = 2,25$$

Ответ. $k = -2,25; 0; 2,25$.

$$y = \frac{1,5|x| - 1}{|x| - 1,5x^2} = \frac{1,5|x| - 1}{|x|(1 - 1,5|x|)} = -\frac{1}{|x|}, \quad x \neq \pm \frac{1}{1,5} \neq \pm \frac{2}{3}$$



$$\begin{aligned} y &= k_1 x: \\ -\frac{3}{2} &= k_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) \\ k_1 &= \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= k_2 x: \\ -\frac{3}{2} &= k_2 \cdot \frac{2}{3} \\ k_2 &= \frac{-3 \cdot 3}{2 \cdot 2} = -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

Order: $-\frac{9}{4}; \frac{9}{4}$

$$22. y = \frac{1,5|x| - 1}{|x| - 1,5x^2} \quad \text{при } x \neq 0$$

$$x \geq 0 \text{ и } x \neq 0$$

$$x < 0$$

$$y = \frac{1,5x - 1}{x - 1,5x^2}$$

$$y = \frac{-1,5x - 1}{-x - 1,5x^2}$$

$$y = \frac{-1(-1,5x + 1)}{x(-1,5x + 1)}$$

$$y = \frac{-1(-1,5x + 1)}{-x(-1,5x + 1)}$$

$$y = -\frac{1}{x}$$

$$y = \frac{1}{x}$$

1) Построю график функции $y = -\frac{1}{x}$
при $x \geq 0$ и $x \neq 0$

$y = -\frac{1}{x}$, гипербола.

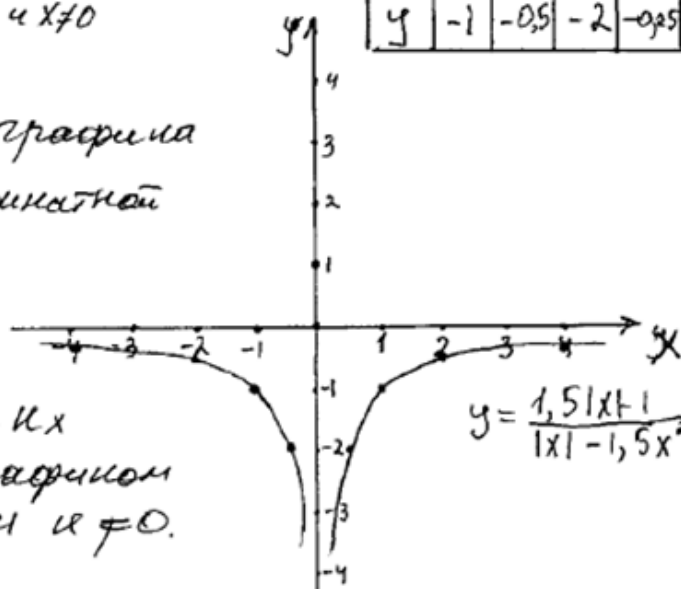
x	0	1	2	4	0,5
y	/	-1	-0,5	-0,25	-2

2) Построю график функции

$$y = \frac{1}{x} \text{ при } x < 0 \text{ и } x \neq 0$$

x	-1	-2	-0,5	-4	
y	-1	-0,5	-2	-0,25	

Построю оба графика
на одной координатной
плоскости.



Прямая $y = kx$
не имеет с графиком
общих точек при $k \neq 0$.

Ответ: 0.

Критерии оценивания выполнения задания 22

Содержание критерия	Баллы
График построен верно, верно найдены искомые значения параметра	2
График построен верно, но искомые значения параметра найдены неверно или не найдены	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>